**Сведение решения уравнения Фредгольма с вырожденным ядром к линейной алгебраической системе.**

 Интегральным уравнением с вырожденным ядром называется уравнение вида

  (1)

  (2)

Функции , . Системы функций , ,  являются линейно независимыми функциями на  и .

 Пусть уравнение (1) имеет решение, т.е. существует такая функция , что имеет место тождество

 

  (3)

 - неизвестные числа.

 . (4)

 Домножим это равенство на ,  и проинтегрируем по 

 , 

 ,  (5)

где

  (6)

  (7)

Следовательно, всякое решение  уравнения (1) порождает решение  алгебраической системы уравнений (5).

 Обратно пусть  решение системы (5). Построим функцию  по формуле (4)

 , подставим в (1)

 

 

 

 .

Получилось тождество, т.к.  - решение системы (5). Таким образом, доказана теорема.

**Теорема 1. (об эквивалентности)**

Интегральное уравнение (1) эквивалентно системе (5) в том смысле, что

а) каждому решению  уравнения (1) соответствует одно решение  системы (5), которое находится по формуле (3).

б) наоборот, каждому решению  системы (5) соответствует одно решение уравнения (1), которое находится по формуле (4).

**Сведение решения транспонированного уравнения Фредгольма с вырожденным ядром к линейной алгебраической системе.**

Уравнение вида

 , 

здесь  транспонированное по отношению к уравнению (1).

 Найдем алгебраическую систему, соответствующую этому уравнению

 , 

где , .

 Умножим  на  и проинтегрируем по . В результате получим алгебраическую систему

 , . 

Уравнение  эквивалентно системе  в таком же смысле как и уравнение (1) эквивалентно системе (5).

**Замечание 1.**

Матрицы при неизвестных для системы (5)

 

а для системы 

 

Они транспонированные.

**Замечание 2.**

 Однородным уравнениям (1)  и   соответствуют однородные системы

 , . (5)

 , . 

**Условия существования решения .**

 Рассмотрим систему (5). Её разрешимость зависит от определителя при неизвестных .  - многочлен степени  относительно . Пусть  такое, что . Такое число называется правильным. В этом случае система (5) имеет единственное решение. Уравнение (1) так же имеет единственное решение. Система 

 имеет так же единственное решение, так как . Однородные системы, соответствующие системам (5) и , а так же однородные уравнения соответствующие уравнениям (1) и  имеют только нулевые решения.

**Вывод.** Если - правильное, то уравнения (1) и  имеют единственные решения, а соответствующие им однородные уравнения имеют только нулевые решения.

 Пусть  такое, что . Так как  - многочлен степени , то значений  при которых  не более чем  . Эти значения называются собственными.

Пусть  - собственное число. Рассмотрим сначала однородное уравнение (1). Ему соответствует однородная система (5). В этом случае число решений однородной системы (5) определяется рангом матрицы . Система имеет  линейно-независимых решений , , где . Все решения даются формулой

 , где  - произвольные постоянные.

Соответственно, любое решение однородного уравнения (1) представимо в виде

 ,

где ,  совокупность  - линейно независимых решений однородного уравнения (1) при , где  - произвольные постоянные.

 Аналогично, однородное уравнение  имеет так же  линейно-независимых решений, так как . Таким образом, общее решение однородных уравнений (1) и  являются линейными комбинациями с произвольными постоянными их линейно независимых решений.

 Теперь рассмотрим уравнение (1) и соответственно систему (5) при условии . Известно, что система (5) разрешима тогда и только тогда, когда ранг матрицы  совпадает с рангом расширенной матрицы 

 , .

**Теорема (об условии разрешимости)**

 Если  собственное число , то

1. для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнения условий , , (6)

 где  линейно независимые решения однородного уравнения . Эти условия называются условиями ортогональности функции  ко всем решениям однородного транспонированного уравнения .

1. если условия ортогональности выполняются, то общее решение уравнения (1) представимо в виде

 ,

где  - общее решение однородного уравнения (1), а  - некоторое частное решение неоднородного уравнения (1).

**Замечание.** Условие (6) эквивалентно условию ,где  - любое решение однородного уравнения .

**Доказательство.**

 Пусть  - решение уравнения (1), тогда

  (7)

и  - любое решение однородного уравнения 

 .

Умножим тождество (7) на  и проинтегрируем от  до 

.

 В силу непрерывности ядра  и функций  и  на отрезке  в повторном интеграле можно менять порядок интегрирования

 

 .

Итак условие (6) выполняется для любого решения однородного уравнения 

 . Необходимость первого условия доказана.

 Доказательство достаточности проведём для вырожденного ядра. Пусть условие (6) выполняется для любого решения однородного уравнения . Докажем, что уравнение (1) разрешимо. Возьмем произвольное решение  однородной системы . Ему соответствует решение  однородного уравнения . Поэтому выполняется условие (6).

 

или

  или .

Т.е. вектор правых частей системы (5) ортогонален любому решению однородной системы . Остается доказать, что .

 Пусть  и пусть

  (7)

Возьмем любой определитель -го порядка матрицы . Например, при 

 

 - алгебраические дополнения соответственно элементов  в определителе .

 Проверим, что вектор  является решением однородного уравнения . Подставим этот вектор в -ое уравнение однородной системы , 

 

.

Так как умножаем элементы -го столбца матрицы  на алгебраические дополнения - го столбца. Таким образом вектор  удовлетворяет первым  уравнениям однородной системы .

 Если подставить вектор  в уравнения при  однородной системы , то получим

 .

Это выражение можно рассматривать как разложение определителя

 

по элементам последнего столбца. Следовательно, , как определитель - го порядка матрицы , ранг которой равен .

 Таким образом вектор  удовлетворяет всем уравнениям однородной системы . Из этого условия следует выполнения условия (6), из которого вытекает, что

 .

 Таким образом, мы доказали, что любой определитель - го порядка матрицы  равен нулю. Значит . Откуда следует, что система (5) имеет решение, а следовательно, уравнение (1) разрешимо. Часть 1 теоремы доказана.

 Перейдем к доказательству части 2 теоремы. Пусть  - совокупность - линейно независимых решений однородного уравнения (1) и  его общее решение, где - произвольные постоянные и  - какое-нибудь решение уравнения (1).

 Тогда уравнение (1) имеет бесчисленное число решений

  (8)

Проверкой убеждаемся, что  решение уравнения (1).

 

Левая часть уравнения (1) равна

  (9)

В правой части получаем

 

  (10)

Из формулы (9) вычтем (10)

 

 

Следовательно,  удовлетворяет уравнению (1).

 Осталось показать, что любое решение уравнения (1) представимо в виде (9). Пусть  любое решение уравнения (1), а  какое-нибудь решение уравнения (1), т.е.

 

и

 

тогда

 ,

т.е.  - решение однородного уравнения (1) поэтому существует набор таких чисел , что

 

откуда

 .

Теорема доказана.

**Замечание.** В ходе доказательства теоремы было доказано, что если вектор  правых частей системы (5) ортогонален любому решению однородной системы , то система (5) разрешима.

 Этот критерий справедлив для любых линейных систем.

**Лемма 1.**

 Для того чтобы алгебраическая система

 , , 

была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы вектор-столбец правых частей  был ортогонален ко всем решениям  транспонированной однородной системы

 , где , т.е. .

Доказательство.

Необходимость. Пусть  - решение системы, т.е. .

Найдем

 .

Достаточность доказана в предыдущей теореме.

**Определение 1.** Число  называется правильным для ядра , если однородное уравнение (1) имеет только тривиальное решение.

Для вырожденного ядра  это те значения  при которых .

**Определение 2.** Число  называется собственным, если однородное уравнение (1) имеет ненулевые решения, а соответствующие линейно независимые решения однородного уравнения (1) называются собственными функциями ядра .

Для вырожденного ядра это те значения , при которых .

 Однородное уравнение (1)

 

можно записать в виде

    - собственное значение.

Собственные функции определяются с точностью до ненулевого множителя.

 Если  не совпадает ни с одним из собственных значений, то интегральное уравнение (1) имеет решение при любом свободном члене и это решение единственно. Соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

 Если  совпадает с одним из собственных значений, то при произвольно взятом свободном члене интегральное уравнение вообще говоря, неразрешимо. Соответствующее однородное интегральное уравнение имеет нетривиальное решение.

**Определение 3.** Наибольшее число линейно независимых на  собственных функций, отвечающих данному собственному значению , называется геометрической кратностью этого собственного значения или его рангом.

 Собственное значение ещё по другому называется характеристическим значением.

 Собственное значение, геометрическая кратность которого равна 1, называется простым. Геометрические кратности двух разных собственных значений могут быть различными.

**Определение 4.** Ядро  называется сопряженным с ядром . Если  - вещественная функция, то .

**Определение 5.** Уравнение

 

называется сопряженным или союзным с уравнением

 .

 Все предыдущие результаты для интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром можно сформулировать в виде теорем Фредгольма.

**Теорема 3.**

Если  - правильное число ядра , то уравнения (1) и  имеют единственные решения при любых функциях  и . Соответствующие им однородные уравнения имеют только нулевые решения.

**Теорема 4.**

Вырожденное ядро

 ,

где  и  - линейно-независимые функции, имеет не более  собственных значений. Эти значения являются собственными для ядра .

**Теорема 5.**

 Если - собственное значение ядра , то однородные уравнения (1) и  имеют одинаковое количество линейно-независимых собственных функций.

**Теорема 6.**

Если - собственное значение ядра , то неоднородное уравнение (1) имеет решение тогда и только тогда, когда функция  ортогональна ко всем решениям однородного сопряженного уравнения .

 Если условие ортогональности выполнено, то уравнение (1) имеет бесконечное множество решений и общее решение неоднородного уравнения (1) есть сумма общего решения однородного уравнения (1)  и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения , т.е. .

Часто все вышеперечисленные результаты формулируются так:

**Теорема 7 (об альтернативе).**

Для интегрального уравнения (1) представляются две взаимоисключающие возможности:

1. Или  не является собственным числом ядра , то уравнения (1) и  имеют только по одному решению при любых функциях  и . Соответствующие однородные уравнения (1) и  имеют только нулевые решения.
2. Или  является собственным числом ядра , тогда уравнение (1) разрешимо в том и только в том случае, когда функция  ортогональна ко всем решениям соответствующего однородного сопряженного уравнения . При этом уравнения (1) и  имеют одинаковое и притом конечное число линейно-независимых решений и общее решение уравнения (1) складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения (1).